

# Über gebundene Zustände von $\pi$ -Mesonen

Von KLAUS HAIN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 9a, 495–508 [1954]; eingegangen am 11. Dezember 1953)

Es wird die Möglichkeit untersucht, ob zwei pseudoskalare  $\pi$ -Mesonen, die über das Nukleon-Antinukleonfeld in Wechselwirkung miteinander stehen, einen gebundenen Zustand haben können.

Die Auswahlregeln erlauben einen Zustand vom Bahndrehimpuls  $l=1$  aus verschiedenen geladenen  $\pi$ -Mesonen mit einer Wellenfunktion, die symmetrisch in den Relativzeiten und antimetrisch in den Isotopenspins ist.

Außerdem erlauben die Auswahlregeln einen aus gleichen  $\pi$ -Mesonen zusammengesetzten Zustand vom Bahndrehimpuls  $l=1$ , der antimetrisch in den Relativzeiten ist und sich bei Raum-Zeit-Spiegelung wie ein Pseudovektor transformiert. Die Transformation dieser Zwei-Mesonenwellenfunktion in die Nukleon-Antinukleonfunktion zeigt, daß es sich um einen relativistischen Effekt handelt.

Die Berechnungen in erster störungstheoretischer Näherung zeigen: Die Wechselwirkung besteht aus zwei Teilen, einer abstoßenden  $\delta$ -Kraft, die zur Erklärung der Absättigung der Kernkräfte dienen kann, da sie dem nicht-linearen Glied in der Schiffschen Gleichung entspricht, und einer anziehenden Kraft von der Reichweite der halben Compton-Wellenlänge des Protons, die die Möglichkeit gibt, daß der niedrigste gebundene Zustand ein solcher vom Bahndrehimpuls  $l=1$  sein kann.

Löst man die B.S.Gl. mit dieser Wechselwirkung durch ein Ritzsches Verfahren, so erhält man als Bedingung für die Existenz eines gebundenen Zustands für die Kopplungskonstante bei verschiedenen geladenen  $\pi$ -Mesonen etwa 14 und bei neutralen  $\pi$ -Mesonen, deren Wellenfunktion antimetrisch in den Relativzeiten ist, etwa 8. Das erstgenannte Doppelvektormeson kann vielleicht zur Erklärung der Spin-Bahn-Kopplung dienen.

In der vorliegenden Arbeit soll die Frage untersucht werden, ob ein gebundener Zustand aus zwei  $\pi$ -Mesonen existieren kann, und welche Eigenschaften er, wenn er existiert, haben muß. Die Bindung der beiden  $\pi$ -Mesonen aneinander soll durch das Nukleonenfeld bewirkt sein.

Angeregt wurde die Untersuchung durch einige phänomenologische Betrachtungen über die Kernkräfte, die den Gedanken einer Existenz solcher Doppelmesonen nahelegen. Diese Betrachtungen, die freilich nicht zwingend sind, seien hier kurz geschildert.

Die wichtigsten Tatsachen, die eine Theorie der Kernkräfte erklären muß, sind die Absättigung und die Spin-Bahn-Kopplung:

Die Absättigung läßt sich gut durch einen phänomenologischen Ansatz einer nicht-linearen Mesontheorie nach Schiff<sup>1</sup> erklären. Das nichtlineare Glied, das dabei in der Wellengleichung der Mesonen auftritt, kann auch als eine zwischen den Mesonen wirkende abstoßende Kraft vom Charakter einer  $\delta$ -Funktion gedeutet werden.

Die Spin-Bahn-Kopplung kann man besonders leicht durch eine Wechselwirkung erhalten, die durch Vektormesonen<sup>2</sup> vermittelt wird. Obgleich eine solche Kopplung auch für pseudoskalare Mesonen in höheren Näherungen der Wechselwirkung erhalten werden kann, erscheint dennoch die Möglichkeit diskutabel, daß die Kernkräfte durch ein Zusammenwirken zweier Mesonensorten erzeugt werden, von denen die einen die bekannten pseudoskalaren  $\pi$ -Mesonen sind, während die anderen Vektor-Charakter tragen.

Einen Hinweis auf eine solche Möglichkeit ergibt z. B. die folgende Betrachtung: Die Kernkräfte sollen durch das Zusammenwirken der beiden Mesonenfelder bestimmt werden, dann können wir — zum mindesten in erster Näherung — annehmen, daß die (exper. bestimmten) anomalen magnetischen Momente von Proton und Neutron sich einfach additiv aus den magnetischen Momenten der Einzelfelder zusammensetzen. Setzen wir die quantenfeldtheoretisch in erster Näherung berechneten anomalen magnetischen Momente für pseudoskalares und Vektormesonenfeld der symmetrischen Theorie ein<sup>3</sup>, so erhalten wir zwei li-

<sup>1</sup> L. L. Schiff, Phys. Rev. 84, 1 [1951].

<sup>2</sup> H. Gauß, Z. Naturforschg. 7a, 44 [1952].

<sup>3</sup> R. R. Feynman, Vorl. High energy phenomena [1951], gibt dafür folgende Werte an:

	Pseudoskalar $g_1^2/4\pi^3$	vektoriell $g_2^2/4\pi^3$
Proton	+ 0,109	+ 0,688
Neutron	- 0,815	+ 0,344



neare Gleichungen für die beiden Kopplungskonstanten  $g_{ps}$  und  $g_v$ . Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt

$$g_{ps}^2/4\pi = 10,2, \quad g_v^2/4\pi = 6,6.$$

Wenn man diesen Betrachtungen auch keine allzu-große Bedeutung beizumessen haben dürfte, da die magnetischen Momente nur in erster Näherung, die nicht sehr gut ist, berechnet worden sind, so ist doch zu bemerken, daß man durch lineare Überlagerung zweier anderer Felder als des pseudoskalaren und des vektoriellen Mesonenfeldes keine positiven Werte für die Quadrate der beiden Kopplungskonstanten  $g_p^2$  und  $g_v^2$  erhält.

Die Untersuchungen von Photosternen, die durch energiereiche Höhenstrahlen (50 GeV und mehr) in Photoplatten verursacht werden, zeigen außer den gewöhnlichen Zerfallsprodukten (Protonen und  $\pi$ -Mesonen) Spuren von geladenen Teilchen, deren Masse zwischen 800 und 1200  $m_e$  liegt. In drei Fällen haben Powell<sup>4</sup> und seine Mitarbeiter auch Hinweise auf die Existenz eines Teilchens gefunden ( $\zeta$ -Mesonen), dessen Masse ungefähr zwei  $\pi$ -Mesonen beträgt und das in zwei entgegengesetzt geladene  $\pi$ -Mesonen zerfällt. Wegen der Seltenheit der bis jetzt bekannten Fälle (3 unter ungefähr 1000) kann man aber noch nicht die Existenz eines solchen Teilchens auf Grund dieser Beobachtung als experimentell gesichert ansehen.

Will man versuchen, eine Theorie der Kernkräfte aufzustellen, die als einziges Wechselwirkungsfeld ein pseudoskalares  $\pi$ -Mesonenfeld hat, so hat diese Theorie gemäß den obigen Überlegungen folgende Tatsachen zu erklären:

1. Die Existenz einer abstoßenden  $\delta$ -Kraft zwischen  $\pi$ -Mesonen, die für die Absättigung verantwortlich ist.
2. Die Existenz von Vektormesonen, die
  - a) die Spin-Bahn-Kopplung verursachen,
  - b) bei energiereichen Kernprozessen schwer zu beobachten sind.

Wir versuchen dies durch folgende Annahme zu erreichen:

Das Vektormeson sei ein zusammengesetztes Teilchen, das aus zwei pseudoskalaren  $\pi$ -Mesonen besteht. Seine Bindungsenergie sei so gering, daß es schon bei kleiner Anregungsenergie, wie sie sicher bei den Kernprozessen erreicht wird, sofort wieder zerfällt.

Versucht man gemäß den bisherigen Betrachtungen sich ein Bild von den Kräften zu machen, die zwischen zwei  $\pi$ -Mesonen bestehen müssen, um die unter 1. und 2. aufgeführten Forderungen erfüllen zu können, so läßt sich sofort folgendes über die Form des Potentials sagen:

<sup>4</sup> W. M. Powell, Kolloquiumsvortr. Göttingen, 1953.

Innen stark abstoßend von sehr kurzer Reichweite, was sich vielleicht am besten durch eine abstoßende  $\delta$ -Kraft beschreiben läßt, weiter außen anziehend. Die Annahme der abstoßenden  $\delta$ -Kraft liefert die Absättigung und verhindert außerdem den normalen sonst auftretenden Grundzustand vom Bahndrehimpuls null. Als energetisch nächster Zustand bleibt dann ein solcher vom Bahndrehimpuls  $l=1$ , falls dieser nicht durch Auswahlregeln verboten wird. Nehmen wir ferner an, daß wir dieses zusammengesetzte Gebilde als ein einheitliches Teilchen ansehen können, so haben wir die Existenz des Vektormesons erklärt. Wegen seiner kleinen Bindungsenergie wird es bei Kernreaktionen nur schwer zu beobachten sein.

Wir werden im folgenden finden, daß ein Vektormeson dieser Art existieren kann, wenn die Kopplungskonstante zwischen den  $\pi$ -Mesonen und den Nukleonen einen scharf definierten Wert hat, der nach unserer Näherungsrechnung etwa durch

$$g^2/4\pi = 14 \quad (\hbar = c = 1)$$

gegeben ist. Die Bedingung, welche an die Kopplungskonstante gestellt wird, ist verhältnismäßig streng, da die Energieeinheit, in der die Änderung der Bindungsenergie bei einer Änderung der angenommenen Kopplungskonstanten berechnet wird, die Ruhenergie des Nukleons ist. Eine kleine Änderung der Kopplungskonstanten bewirkt, verglichen mit der Mesonenmasse, eine große Änderung der Bindungsenergie.

Die nachfolgende Rechnung kann freilich nicht zeigen, daß ein solches Doppelmeson, auch wenn es existiert, in den Kernen wie ein einheitliches Elementarteilchen wirkt. Es ist also nicht sichergestellt, daß man ihm eine einfache Wellenfunktion und eine wohldefinierte Kopplungskonstante gegenüber dem Nukleonfeld zuschreiben kann. Wenn man dies darf, so ist natürlich die Größe der Kopplungskonstanten abhängig von der Kopplungskonstanten des ursprünglichen pseudoskalaren Feldes. Die vollständige Behandlung dieses ganzen Fragenkreises führt auf ein Hauptproblem der heutigen Quantenfeldtheorie, nämlich auf die Frage, wie und inwiefern man einen gebundenen Zustand zweier Teilchen als ein Teilchen ansehen und behandeln darf. Wir beschränken uns hier auf die Frage, ob man unter Zugrundelegung der bis jetzt bekannten Felder mit Hilfe der Quantenfeldtheorie die Möglichkeit der Existenz eines gebundenen Zustands vom Bahndrehimpuls  $l=1$  zeigen kann.

Wir gehen nun so vor, daß wir zunächst einige Auswahlregeln zusammenstellen und dann versuchen, die durch die Auswahlregeln erlaubten Zustände zu berechnen. Als Feld, das die Wechselwirkung zwischen den  $\pi$ -Mesonen vermitteln soll, nehmen wir, wie schon erwähnt, das Nukleon-Antinukleonfeld und mit Hilfe der Bethe-Salpeter-Gleichung (B.S.Gl.)<sup>5</sup>, die wir durch einen Variationsansatz näherungsweise lösen, berechnen wir dann die Kopplungskonstante bei gegebener Bindungsenergie als Eigenwert der entstandenen Integralgleichung. Die Berechnung des Integralkernes der B.S.Gl., der die relativistische Verallgemeinerung des zwischen den beiden  $\pi$ -Mesonen bestehenden Potentials ist, liefert eine abstoßende  $\delta$ -Kraft (die Größe der Kraft ist durch Renormierung noch festzulegen) und ein anziehendes Potential, dessen Reichweite etwa die halbe Compton-Wellenlänge eines Nukleons beträgt.

### Auswahlregeln

Die Bedeutung der Auswahlregeln für unseren Fall beruht auf der Annahme, daß kein Teilchen als ein gebundener Zustand aus mehreren Teilchen bestehen kann, wenn es nach den Auswahlregeln nicht erlaubt ist, dieses nach Zuführung der notwendigen Energie wieder in seine Bestandteile zu zerlegen.

Wir können zwei Arten von Auswahlregeln unterscheiden: Erstens Auswahlregeln, die nur aus Paritätserhaltungs- und Symmetrieeigenschaften der beteiligten Teilchen folgen; zweitens solche, die auf einem durch die eben genannten Bedingungen nicht erzwungenen Verschwinden von Übergangsmatrixelementen beruhen.

Die ersten wurden von Peaslee<sup>6</sup> näher untersucht. Wir verallgemeinern hier seine Untersuchungen für unsere Zwecke durch Einführung von geladenen Mesonen. Wir betrachten dabei ein Gebilde, das sich aus zwei pseudoskalaren oder skalaren Mesonen zusammensetzt, und definieren eine Zwei-Mesonenwellenfunktion

$$\varphi = \varphi(x_1, \eta_1; x_2, \eta_2),$$

wobei  $\varphi$  im Sinne der mehrzeitigen Theorie die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür ist, das Teilchen 1 am Ort  $r_1$  und bei der Zeit  $t_1$  und das Teilchen 2 am Ort  $r_2$  und bei der Zeit  $t_2$  anzutreffen.  $\eta_1, \eta_2$  sind die Ladungskoordinaten. Wegen der Bosoneneigenschaften der Mesonen muß gelten

$$\varphi(x_1, \eta_1; x_2, \eta_2) = \varphi(x_2, \eta_2; x_1, \eta_1). \quad (1)$$

<sup>5</sup> H. A. Bethe u. E. E. Salpeter, Phys. Rev. **84**, 1232 [1951].

<sup>6</sup> D. C. Peaslee, Helv. Phys. Acta **23**, 845 [1950].

Wir setzen nun voraus, daß sich die Wellenfunktion als Summe von direkten Produkten der Isotopenspinoperatoren  $P_\nu(\eta_1, \eta_2)$  und der Ortskoordinaten schreiben läßt. Wenn wir noch die Schwerpunktsbewegung abspalten, können wir schreiben

$$\varphi(x_1, \eta_1; x_2, \eta_2) = \Phi\left(\frac{(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)}{\mu_1 + \mu_2}\right) \sum_\nu P_\nu(\eta_1, \eta_2) \varphi_\nu(x_1 - x_2).$$

Wir schreiben jedem Meson den Isotopenspin 1 zu, die  $z$ -Komponente stellt dann die Ladungen dar;  $m = \pm 1$  positiv, bzw. negativ geladen und  $m = 0$  neutral. Die Zusammensetzung von zwei Isotopenspins liefert dann zwei symmetrische Zustände — Singulett und Quintett —

$$P_+(\eta_1, \eta_2) = P_{0,2}(\eta_1, \eta_2) = P_+(\eta_2, \eta_1) \quad (2)$$

und einen antimetrischen Tripletztzustand<sup>7</sup>

$$P_-(\eta_1, \eta_2) = P_1(\eta_1, \eta_2) = -P_-(\eta_2, \eta_1).$$

Für  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , d. h. für zwei Neutronen, wird  $P_1 = 0$ . Mit der Definition von geraden und ungeraden Ortsfunktionen

$$\psi_\pm(x_1 - x_2) = \pm \psi_\pm(x_2 - x_1) \quad (3)$$

läßt sich die gesamte Zwei-Mesonenwellenfunktion aus zwei verschiedenen Funktionen zusammensetzen.

$$\varphi(x_1, \eta_1; x_2, \eta_2) = \Phi\left(\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) \cdot \{P_+(\eta_1, \eta_2) \psi_+(x_1 - x_2) + P_-(\eta_1, \eta_2) \psi_-(x_1 - x_2)\}. \quad (4)$$

Setzen wir zunächst voraus, daß die Wellenfunktion symmetrisch in den Relativzeiten ist, wie dies z. B. in der einzeitigen Theorie, in der  $t_1 = t_2$ , der Fall ist, dann gilt für einen Zustand vom Bahndrehimpuls  $J$  für die Parität

$$P_J = (-)^J. \quad (5)$$

Bezeichnet man mit  $P_e$  die Ortsparität des zusammengesetzten Teilchens, so gilt die folgende Auswahlregel für einen Zustand aus zwei Mesonen der gleichen Parität

$$P_e = \begin{cases} -1 & \text{für } J = \begin{cases} \text{ungerade} & P_- \\ \text{gerade} & P_+ \end{cases}, \\ +1 & \end{cases} \quad (6)$$

Daraus folgt, daß ein Zustand von ungeradem Drehimpuls von zwei gleichen Teilchen verboten ist, da gegen erlaubt sein kann, wenn die Teilchen verschiedene Ladungen haben.

Die bisherigen Überlegungen scheinen aber noch nicht alle möglichen Fälle zu umfassen, da nur die Invarianzeigenschaft gegenüber räumlicher Spiegelung benutzt wurde. Man muß aber mit der Möglichkeit rechnen, daß die relativistische Zwei-Mesonenwellenfunktion auch in den Relativzeiten antimetrisch ist. Die Annahme einer solchen Wellen-

<sup>7</sup> Vgl. Condon and Shortley, Atomic Spectra oder auch Wigner, Gruppentheorie.

funktion erscheint zwar zunächst überraschend, da sie nur in einer mehrzeitigen Schreibweise der Theorie überhaupt ausgesprochen werden kann; denn eine in der Relativzeit zweier Teilchen antimetrische Wellenfunktion muß bei der Gleichsetzung der beiden Zeiten verschwinden. Aber man muß bedenken, daß die Wellenfunktion des Zwei-Mesonenzustandes durch die Differential- bzw. Integralgleichung, durch die sie gegeben wird, noch nicht eindeutig bestimmt wird, wenn die Anfangswerte der Funktion für gleiche Zeiten vorgeschrieben sind, sondern da es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, ist noch die zeitliche Ableitung vorzugeben. Die Wellenfunktion, die in der zeitlichen Ableitung der Zwei-Mesonenwellenfunktion entspricht, müßte sich, da sie symmetrisch in den Relativzeiten ist, in einer einzeitigen Theorie sich wieder aus einer Integralgleichung ableiten lassen. Eine in den Relativzeiten antimetrische Wellenfunktion wäre nach diesen Überlegungen und nach der im folgenden gegebenen Analyse ihrer Eigenschaften wesentlich durch die Retardierungseffekte bestimmt und würde beim Übergang zum nicht-relativistischen Grenzfall verschwinden. Wenn solche Wellenfunktionen möglich sind, so muß es also außer den bisher betrachteten Zuständen zweier Teilchen eine weitere Menge von Zuständen geben, die nur im extrem relativistischen Grenzfall eine mit den bekannten Zuständen vergleichbare Energie haben; man muß annehmen, daß beim Übergang zum nichtrelativistischen Grenzfall diese neuen Zustände in irgendeiner Weise verloren gehen, etwa indem ihre Energien gegen unendlich rücken. Dieser Grenzübergang ist in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht untersucht worden. Für die in der Relativzeit antimetrischen Zustände erhält man auf dieselbe Weise wie vorhin die folgenden Auswahlregeln:

$$P_e = \begin{cases} +1 & \text{für } J = \begin{cases} \text{ungerade} & P_+ \\ \text{gerade} & P_- \end{cases} \\ -1 & \end{cases}. \quad (7)$$

Bei der zweiten Art von Auswahlregeln, die wir hier nur für Mesonen benutzen wollen, betrachten wir S-Matrixelemente, deren Darstellung durch Graphen als äußere Linien nur Mesonenlinien enthalten, damit bekommen wir zwei Auswahlregeln: Eine starke, die auf der Invarianz gegenüber Ladungskonjugation beruht, und eine sog. schwache, die nur unter Ausschluß des Photonenfeldes gilt und die von der Invarianz gegenüber Ladungsvertauschung herrührt.

Die Ladungskonjugation bedeutet für das Nukleonenfeld Vertauschung von Teilchen mit Antiteilchen, für das Mesonenfeld Ladungsvertauschung. Die Wechselwirkung der beiden Felder miteinander erfolgt über

einen Dirac-Operator, der dabei entweder sein Vorzeichen wechselt oder invariant bleibt. Die erstere bezeichnen wir als ungerade, die letztere als gerade:

gerade: 1 skalar  $i\gamma_5$  pseu. skal.  $i\gamma_5\gamma_\mu$  pseu. vek.  
ungerade:  $\gamma_\mu$  vektor.  $\gamma_\mu\gamma_\nu$  Tensor  $i\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu$  pseu. tens.

Die Anzahl der äußeren „ungeraden Mesonlinien“ bezeichnen wir mit  $n_u$ .

Die Ladungsvertauschung bedeutet für das Nukleonenfeld Vertauschung von Proton mit Neutron, für das Mesonenfeld eine Vertauschung der Ladungen. Die Wechselwirkung eines neutralen Mesonenfeldes mit dem Nukleonenfeld ändert entweder sein Vorzeichen oder bleibt ungeändert, je nachdem ob die Wechselwirkung über den Isotopenspinoperator 1 oder über  $\tau_z$  erfolgt. Die Anzahl der äußeren „ $\tau_z$ -Mesonlinien“ bezeichnen wir mit  $n_z$ .

Da die Vertauschungsrelationen und die T-Produkte invariant gegenüber diesen Transformationen sind, folgt aus der Forderung der Invarianz der Lagrange-Funktion, daß die Transformationseigenschaften der S-Matrixelemente nur durch die Transformations-eigenschaften der äußeren Mesonen bestimmt werden. Wie bei Pais und Jost<sup>8</sup> näher ausgeführt, erhält man im allgemeinen Fall die Auswahlregel

$$\begin{array}{lll} n_u + n_z & \text{ungerade} & \text{verboten} \\ \text{und für ein neutrales Mesonenfeld} & & \\ n_u, n_z & \text{ungerade} & \text{verboten}. \end{array}$$

Aus der zweiten Art von Auswahlregeln, die auf einer Invarianz gegenüber Ladungsvertauschung und -konjugation beruht, folgt:

a) daß der Zerfall eines neutralen, über  $\tau_z$  an das Nukleonenfeld gekoppelten Vektormesons  $\mu_{vz}^0$  in zwei entgegengesetzt geladene  $\pi$ -Mesonen erlaubt ist:

$$\mu_{vz}^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \text{ erlaubt},$$

b) daß der Zerfall eines geladenen Vektormesons  $\mu_v^+$  in ein geladenes und ein neutrales  $\pi$ -Meson, das gleichfalls über  $\tau_z$  gekoppelt ist, erlaubt ist:

$$\mu_v^+ \rightarrow \pi^+ + \pi_z^0 \text{ erlaubt.}$$

Nehmen wir nun an, daß es eine gute Näherung ist, das auf die oben beschriebene Art zusammengesetzte Vektormeson als einheitliches Teilchen in seiner Wechselwirkung mit den Nukleonen anzusehen, so stimmen diese Auswahlregeln mit den vorhin abgeleiteten, die eine Aussage über eine mögliche Form der Wellenfunktion von zwei Mesonen machen, überein, denn danach läßt sich eine Wellenfunktion zweier Mesonen für gleiche Zeiten der beiden Teilchen mit dem Bahndrehimpuls  $l=1$  und einem antimetrischen Triplettzustand, der der Kopplung über  $\tau_z$  entspricht, der beiden Isotopenspins kon-

<sup>8</sup> A. Pais u. R. Jost, Phys. Rev. 87, 871 [1952].

struieren. Weiterhin ist nach den ersten Auswahlregeln ein Zustand aus zwei gleichen Mesonen erlaubt, der den Bahndrehimpuls  $l=1$  hat und antimetrisch in der Zeit ist. Diese verhält sich bei Raumzeitspiegelung wie ein Pseudovektor. Nach den beiden bis jetzt eingeführten Auswahlregeln ist ein solcher Zustand ebenfalls erlaubt; im Anhang zu diesem Abschnitt wird aber abgeleitet, daß das Übergangsmatrixelement des Übergangs dieses Zustands in zwei  $\pi$ -Mesonen, zum mindesten in erster Näherung verschwindet. Es erscheint also, wenn wir dieses Ergebnis wie vorhin interpretieren, zweifelhaft, ob ein solcher Zustand erlaubt sein kann. Wir wollen ihn aber dennoch bei unseren weiteren Betrachtungen als einen möglichen Zustand zulassen.

### Anhang zu den Auswahlregeln

Zur Abschätzung der Lebensdauer von zusammengesetzten Mesonen hat man die S-Matrixelemente des Übergangs zu betrachten.

Dies wurde von Noyes<sup>9</sup> für den Zerfall eines skalaren in zwei pseudoskalare Mesonen durchgeführt. Wegen der dabei auftretenden Divergenzen, die durch Renormierung beseitigt werden müssen, erhält er keine eindeutige Angabe der Lebensdauer, sondern kann diese durch Wahl der Größe des Renormierungsterms so festsetzen, daß die skalaren Mesonen hinreichend stabil gegen zwei  $\gamma$ -Zerfall werden. Er erhält dann eine Lebensdauer in der Größenordnung von  $10^{-10}$  sec. Man erhält ebenfalls Divergenzen, die durch Renormierung zu beseitigen sind, wenn man den Übergang eines Vektormesons in zwei pseudoskalare Mesonen betrachten will. Daher wurde diese Untersuchung hier auch nicht durchgeführt.

Für den Zerfall eines Pseudovektormesons in zwei Pseudoskalare, bei dem das S-Matrixelement durch

$$K_\mu(c_q p_1 p_2) = -\frac{ig_V g^2}{3(2\pi)^4} \text{Sp} \int \gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{k-m} \gamma_5 \frac{1}{k-p_1-m} \gamma_5 \frac{1}{k-q-m} d^4 k$$

gegeben wird, wird durch Ausführung der Spurbildung

$$K_\mu = \frac{4i}{3} \frac{g_V g^2}{(2\pi)^4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int \frac{k_\nu p_{1\sigma} p_{2\rho}}{[k^2 - m^2][(k-p_1)^2 - m^2][(k-q)^2 - m^2]} d^4 k = 0$$

wegen der vollständigen Antimetrie des  $\epsilon$ -Tensors. Daher ist ein solcher Zerfall zum mindesten in erster Näherung verboten<sup>10</sup>.

Bethe-Salpeter-Gleichung;  
Transformation der Zwei-Mesonenwellenfunktion in die Nukleon-Antinukleonfunktion

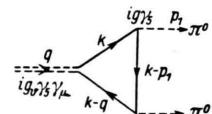
Will man allgemein einen gebundenen Zustand beschreiben — hier soll es sich speziell um den gebundenen Zustand zweier  $\pi$ -Mesonen handeln, die durch das Nukleon-Antinukleonfeld miteinander gekoppelt sind — so geht man nach Zimmermann<sup>11</sup> am besten wie folgt vor: Sei  $\Omega$  der Zustandsvektor des Vakuums und  $A$  der Zustandsvektor des betrachteten physikalischen Systems, so definieren wir  $\tau$ -Funktionen durch

$$\begin{aligned} \tau(1, \dots, n | n+1, \dots, n+m | n+m+1, \\ \dots, n+m+k) \quad (8) \\ = \langle \Omega T \{ A(1), \dots, A(n), \psi(n+1), \dots, \psi(n+m), \\ \bar{\psi}(n+m+1), \dots, \bar{\psi}(n+m+k) \} A \rangle \end{aligned}$$

Dabei bedeuten:  $1 \dots n$  vor dem Strich die Mesonenkoordinaten,  $n+1 \dots n+m$  die Nukleon-,  $n+m+1 \dots n+m+k$  die Antinukleonkoordinaten und  $T$

<sup>9</sup> H. P. Noyes, Phys. Rev. 87, 344 [1952].

<sup>10</sup> Dieselbe Überlegung gilt auch für den Zerfall in zwei skalare Mesonen.



der Zeitordnungsparameter im Wickschen Sinne. Mit Hilfe dieser Funktionen lassen sich durch Abziehen gewisser kontrahierter Terme  $\varphi$ -Funktionen z. B. durch die Gleichungen

$$\varphi(12|3|) = \tau(12|3) - A_F(1-2)\tau(|3|), \quad (9)$$

$$\varphi(1|2|3) = \tau(1|2|3) - S_F(2-3)\tau(|1|)$$

definieren.  $\varphi$  ist dabei eine stetige Funktion seiner sämtlichen Variablen, da die Unstetigkeiten durch die kontrahierten Terme gerade abgezogen worden sind.

Bedeute nun  $H$  die Hamilton-Funktion des Gesamtsystems und gehorcht  $A$  der Schrödinger-Gleichung

$$HA = EA, \quad (10)$$

so lassen sich für die verschiedenen  $\varphi$  Integralgleichungen analog der B.S.Gl. für das Deuteron ableiten. Sei z. B.  $\varphi$  eine Wellenfunktion, die ein System von zwei Mesonen beschreibt, so gilt die Integralgleichung<sup>12</sup>

<sup>11</sup> W. Zimmermann, Sem. Vortr. Göttingen [1953].

<sup>12</sup> Über gleichlautende Variable ist zu integrieren.

$$\varphi(12||) = G(12||; 34||) \varphi(34||). \quad (11)$$

Dabei bedeuten  $G(12||; 34||)$  die Summe aller irreduziblen Graphen, die nicht durch Schnitte derart weiter zerlegt werden können, daß die Schnittlinie nur zwei Mesonenlinien trifft.

Die analoge Integralgleichung für ein Nukleon-Antinukleonpaar lautet

$$\varphi(|1|2) = G(|1|2; |3|4) \varphi(|3|4), \quad (12)$$

wobei  $G(|1|2; |3|4)$  die Summe aller irreduziblen Graphen in bezug auf zwei Nukleonlinien bedeutet. Die Symmetrieeigenschaften der T-Produkte übertragen sich auf die  $\varphi$ -Funktionen. Im Falle zweier Teilchen folgt sofort

$$\varphi(12||) = \tau(12||) \text{ und } \varphi(|12) = \tau(1|2), \quad (13)$$

da das Vakuum auf dem Zustand  $A$  senkrecht steht.

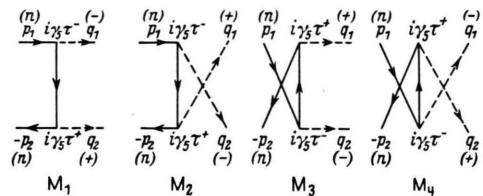
Der gebundene Zustand zweier  $\pi$ -Mesonen läßt sich genau so gut als ein gebundener Zustand von einem Nukleon und einem Antinukleon darstellen, wenn man die Schnitte, die die irreduziblen Graphen definieren, nicht durch zwei Mesonlinien, sondern durch zwei Nukleonlinien legt. Wenn wir annehmen, daß das zusammengesetzte Teilchen ungefähr die Ruhmasse von zwei  $\pi$ -Mesonen hat, so ist es vernünftig, dieses Gebilde als einen gebundenen Zustand zweier  $\pi$ -Mesonen zu behandeln, dessen Bindungsenergie gering ist; d. h. das gebundene Teilchen befindet sich den größten Teil der Zeit in einem Zustand, der der Beschreibung durch zwei  $\pi$ -Mesonen am besten entspricht. Sollte dieser gebundene Zustand den Bahndrehimpuls 1 haben, so läßt sich dieses Doppelmeson am ehesten als ein Meson interpretieren, dessen Wechselwirkung mit den Nukleonen vektoriell ist; würde man aber die Wechselwirkung der pseudoskalaren Mesonen in genügend hoher Näherung berechnen, so müßte man auch ohne diesen Umweg direkt eine Spin-Bahn-Kopplung erhalten.

Wir wollen die Transformation dieser Zwei-Mesonenwellenfunktion in die Nukleon-Antinukleon-Wellenfunktion näher betrachten. Die Transformation lautet:

$$\varphi(|1|2) = G(|1|2; 34||) \varphi(34||). \quad (14)$$

Dabei bedeutet  $G(|1|2; 34||)$  die Summe aller irreduziblen Graphen, die sich nicht durch Schnitte zerlegen lassen, die zwei Mesonlinien treffen. Die

einfachsten Integralkerne, die eine solche Transformation vermitteln, lassen sich für Neutronen durch die unten stehenden Graphen<sup>13</sup> beschreiben.



Aus den Graphen erkennt man die folgenden Symmetrieeigenschaften:

1. Die Zwei-Mesonenwellenfunktion muß symmetrisch in den beiden Mesonen sein, daraus folgt automatisch die richtige Kopplung für den Isotopenspin, denn  $M_{i+1}$  geht aus  $M_i$  durch Vertauschung der beiden Mesonen hervor.
2. Die Nukleon-Antinukleonfunktion muß symmetrisch bei Vertauschung von Nukleon und Antinukleon sein, es geht nämlich  $M_{i+2}$  aus  $M_i$  durch Vertauschen der beiden Nukleonen hervor.

Die 1. Forderung haben wir bei unserem Ansatz der Zwei-Mesonenwellenfunktion in der Form

$$\varphi(12) = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}(x_1 + x_2) P_{\nu}(\eta_1, \eta_2) \varphi_{\nu}(1-2)$$

erfüllt. Damit gilt dann

$$M_i = M_{i+1}.$$

Die zweite Forderung für die Nukleon-Antinukleonfunktion schließt Singulettzustände im Spinraum aus.

Wir stellen die Zwei-Nukleonenwellenfunktion durch einen 16-komponentigen Spinor dar, wobei wir von der Ladung im Augenblick absehen wollen. In der Schreibweise

$$\varphi(|1|2) = \begin{pmatrix} F_{11}(r, t) & F_{12}(r, t) \\ F_{21}(r, t) & F_{22}(r, t) \end{pmatrix}$$

stehen die großen Komponenten in der rechten oberen Ecke. Ein Singulettzustand wird dann in bezug auf diese Matrix dargestellt durch

$$F_{12}^{\text{sing}}(r, t) = \delta_{ik} \sum_{m,l} f_l^m(r^2, t) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (15)$$

und ein Tripletztzustand durch

$$F_{12}^{\text{trip}}(r, t) = \sum_{m,l} \sigma_i f_l^{(i)m}(r^2, t) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (15a)$$

ein Zustand mit  $m=0$

<sup>13</sup> Die in Klammern gesetzten Vorzeichen bedeuten die Ladung.

\* Vgl. Watson, Theory of Besselfunctions.

$$\overset{\circ}{F}_{12}^{\text{trip}}(r, t) = \sum_l \{ [\sigma^+ Y_l^1(\theta, \varphi) + \sigma^- Y_l^{-1}(\theta, \varphi)] f_l^1(r^2, t) + \sigma_z Y_l^0 f_l^0(r^2, t) \}. \quad (15\text{b})$$

Wegen unserer Symmetrieforderung muß die Funktion invariant gegenüber Ladungskonjugation sein. In unserer Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen lautet diese Transformation

$$\psi_{\text{anti}} = (i \bar{\psi} \alpha_y)^T. \quad (16)$$

Dann muß eine solche invariante Funktion die Form haben

$$\tilde{\psi}(|1|2) = \psi(1|2) - (\alpha_y \psi^T(1|2)) \alpha_y.$$

Also

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(|1|2) &= \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{11} & \sigma_y f_{12}^{(i)} \\ \sigma_y f_{21}^{(i)} & f_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{mit } f_{11} = F_{11} + \sigma_y F_{22}^T \sigma_y, \quad f_{22} = F_{22} + \sigma_y F_{11}^T \sigma_y,$$

$$\text{so daß } f_{22}^T = \sigma_y f_{11} \sigma_y$$

$$\text{und } \sigma_y f_{12}^{(i)} = F_{12} - \sigma_y F_{12}^T \sigma_y, \quad \sigma_y f_{21}^{(i)} = F_{21} - \sigma_y F_{21}^T \sigma_y.$$

Wie aus dem Beweis hervorgeht, verschwinden gerade die Glieder in den großen Komponenten, die den Singulettzuständen entsprechen. Damit haben wir gezeigt, daß die Zwei-Mesonenwellenfunktion einer Nukleonenfunktion entspricht, bei der sich die beiden Nukleonen im Triplettzustand befinden. Wären die Nukleonen in einem Zustand, der bei Vertauschung von Nukleon mit Antinukleon in sein Negatives überginge, so müßte die Nukleonenwellenfunktion einem Singulettzustand entsprechen. Dies wäre z. B. der Fall, wenn sich Nukleon und Antinukleon zu einem pseudoskalaren Meson zusammensetzen. Fermi und Yang<sup>14</sup> hatten dieses

Resultat mit Hilfe einer Rechnung gefunden. Sie setzten dabei ein pseudoskalares Meson aus einem Nukleon und einem Antinukleon im Singulettzustand  ${}^1S_0$  zusammen. Für ein skalares Meson erhielten sie das überraschende Ergebnis, daß sich die beiden Teilchen im  ${}^3P_0$ -Zustand befinden müßten.

Da uns hier speziell der Fall einer Zwei-Mesonenwellenfunktion vom Bahndrehimpuls  $l=1$  interessiert, wollen wir an Hand der Graphen die Transformation dieser Funktion in die Nukleon-Antinukleonenfunktion näher betrachten. Wir setzen die Mesonenwellenfunktion in Schwerpunktskoordinaten im Impulsraum in der Form an

$$\psi(1|2) = P(1, 2) f(p_r^2, p_4) p_r \cos \vartheta,$$

$$\text{wobei } P(1, 2) = -P(2, 1),$$

$$f(p_r^2, p_4) = f(p_r^2, -p_4)$$

für symmetrische, und

$$P(1, 2) = P(2, 1),$$

$$f(p_r^2, p_4) = -f(p_r^2, -p_4)$$

für in der Zeit antimetrische Funktionen gilt. Da nur Triplettzustände in Frage kommen, folgt aus Drehimpulserhaltungsgründen, daß es sich um ein Gemisch aus den beiden Zuständen  ${}^3S_1$  und  ${}^3D_1$  handeln muß. Demgemäß muß sich unser Zustand schreiben lassen als

$$\psi(|1|2) = \begin{pmatrix} f_{11}(p_r^2, p_4), \sigma_k p_k f_{12} + p_z \sigma_z f'_{12} \\ -\sigma_k p_k f_{21} - \sigma_z p_z f'_{21}, f_{22}(p_r^2, p_4) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Um die Funktionen  $f$  zu bestimmen, führen wir die Transformation aus. Es wird

$$\begin{aligned} \psi(|1|2) &= \frac{g^3}{(2\pi^4)} \frac{1}{p_1-m} \int d^4 p' \left\{ \gamma_5 \frac{1}{p-p'-m} \gamma_5 - \gamma_5 \frac{1}{p+p'-m} \gamma_5 \right\} f(p_r'^2, p_4') p_z' \frac{1}{p_1+m} \\ &\quad + \frac{g^3}{(2\pi^4)} \frac{1}{p_2+m} \int d^4 p' \left\{ \gamma_5 \frac{3}{p-p'-m} \gamma_5 - \gamma_5 \frac{1}{p+p'-m} \gamma_5 \right\} f(p_r'^2, p_4') p_z' \frac{1}{p_1-m}. \end{aligned}$$

(Allgemein bezeichnen wir mit  $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  den Gesamtimpuls und mit  $p = p_1 - p_2$  bzw.  $p' = p_3 - p_4$  den Relativimpuls der beteiligten Teilchen.  $m$  Nukleonmasse,  $\mu$  Mesonenmasse.)

Führt man die Rechnung aus, so erhält man in nichtrelativistischer Näherung — Mittelung über die Relativzeiten bzw. -impulse —, wenn  $\varrho_1, \varrho_2$  Funktionen von  $p_r^2$  sind und  $\varrho_0$  im wesentlichen eine Konstante nahezu eins

$$f_{11} = -\frac{P}{2} \varrho_0 p_r^2 \varrho_1(p_r^2) = f_{22},$$

$$f_{12} = \left( -\frac{P^2}{4} + m^2 - p_r^2 - \varrho_2 \right) \varrho_1(p_r^2) = f_{21},$$

$$f'_{12} = f'_{21} = 0$$

bei einer in den Relativzeiten symmetrischen Me-

<sup>14</sup> E. Fermi u. C.N. Yang, Phys. Rev. **76**, 1739 [1949].

sonenwellenfunktion, und bei einer in den Relativzeiten antimetrischen Wellenfunktion

$$\begin{aligned} f_{11} &= \left( \frac{P^2}{4} - m^2 \right) - \varrho_1(p_r^2) = f_{22}, \\ f'_{12} &= (P\varrho_0 - 2m)\varrho_1(p_r^2), \\ f'_{21} &= (P\varrho_0 + 2m)\varrho_1(p_r^2), \\ f_{12} &= f_{21} = 0. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß im letzteren Fall der Radialanteil, der den großen Komponenten entspricht, sehr klein wird, wenn die Bindungsenergie gegen null geht, dagegen wird der Anteil der den kleinen Komponenten entspricht und der gewöhnlich klein sein soll, sehr viel größer. Daher kann man diese ganze Wellenfunktion als einen relativistischen Effekt ansehen, der nur durch die relativistische Behandlung des Zwei-Mesonenproblems auftreten konnte.

### Die Bethe-Salpeter-Gleichung für zwei Mesonen

Die B.S.Gl. für eine Zwei-Mesonenwellenfunktion im Impulsraum geschrieben lautet

$$\begin{aligned} \varphi(1, 2) &= -i \frac{g^4}{(2\pi)^8} \int \frac{1}{p_1^2 - \mu^2} \cdot \frac{1}{p_2^2 - \mu^2} \\ &\quad \cdot G(p_1, p_2; p_3, p_4) \varphi(3, 4) d^4 p_3 d^4 p_4. \end{aligned} \quad (19)$$

Im Schwerpunktssystem wird daraus die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= -i \frac{g^4}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{(P/2 - p)^2 - \mu^2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(P/2 + p)^2 - \mu^2} G(p, p') d^4 p'. \end{aligned}$$

Diese Integralgleichung schreiben wir symbolisch in der Form

$$F(p) \varphi(p) = \lambda \int K(p, p') \varphi(p') d^4 p'. \quad (20)$$

Zur Lösung der Integralgleichung durch ein Ritzsches Verfahren setzen wir als Wellenfunktion an

$$\varphi = \varphi(p; \beta).$$

Dann ist in der Gleichung

$$\begin{aligned} \int F(p) \varphi^2(p; \beta) d^4 p \\ = \lambda \int K(p, p') \varphi(p; \beta) \varphi(p'; \beta) d^4 p d^4 p' \end{aligned}$$

$\beta$  so zu variieren, daß entweder bei gegebener Kopplungskonstante die Energie, oder bei gegebener Bindungsenergie die Kopplungskonstante ein Minimum wird. Da es hier nur auf die Größenordnung des Kopplungsparameters ankommt, wollen wir ihn bei  $\lambda = ig^4/(2\pi)^4$  für  $E=0$  bestimmen. Durch das Null-

setzen der Bindungsenergie begeht man keinen sehr großen Fehler; da nur das Verhältnis  $E/m$  eingeht, bedeutet dies, daß der Energiemaßstab, in dem gemessen wird, die Ruhmasse des Protons ist; daraus folgt, daß die Größe von  $g$  nicht sehr viel von der Bindungsenergie abhängen kann.

Zur Lösung entwickeln wir die Wellenfunktion nach räumlichen Kugelfunktionen

$$F(p) = \sum_{m,l} P_l(\eta_1, \eta_2) \varphi_l^m(p_r^2, p_4) Y_l^m(\theta, \varphi); \quad (21)$$

dabei bedeuten  $Y_l^m$  die normierten Kugelfunktionen der Winkel  $\theta, \varphi$ , die der Vektor  $p_r$  mit der  $z$ -Richtung des Koordinatensystems bildet. Für einen Zustand von einem bestimmten  $l$  und  $m$  erhalten wir

$$F(p) \varphi_l^m(p^2) \quad (22)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{2l+1}} \int K_l(p_r, p_4; p_r', p_4') \varphi_l^m(p'^2) d p_4' p'^2 d p_r'$$

mit

$$K_l = \int Y_l^0(\theta') K(p, p') d(\cos \theta) d\varphi'.$$

Auf diese Gleichung wollen wir das vorhin beschriebene Ritzsche Verfahren anwenden; wir berechnen dazu im nächsten Abschnitt den Integralkern und führen dann die Variation nach einem Parameter durch, der der Abstand der beiden Teilchen ist. Da für die Ortsparität gilt

$$P_e = (-)^l,$$

muß für gerades  $l$

$$\varphi_l^m(p_r^2, p_4) = \pm \varphi_l^m(p_r^2 - p_4)$$

$$\text{und} \quad P_e(\eta_1, \eta_2) = \pm P_e(\eta_2, \eta_1)$$

und für ungerades  $l$

$$\varphi_l^m(p_r^2, p_4) = \pm \varphi_l^m(p_r^2 - p_4)$$

$$\text{und} \quad P_e(\eta_1, \eta_2) = \mp P_e(\eta_2, \eta_1)$$

sein. Die Antimetrie in den  $p_4$  erreichen wir einfach, indem wir ansetzen

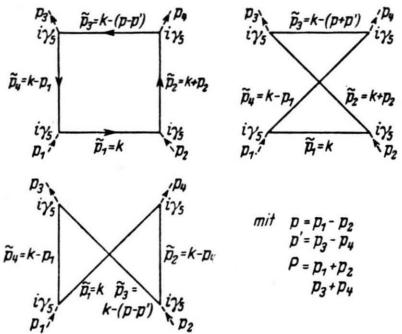
$$f(p_4) = g(p_4^2) \varepsilon(p_4),$$

$$\text{wobei} \quad \varepsilon(p_4) = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } p_4 \leq 0 \\ 0 & \text{für } p_4 = 0. \end{cases}$$

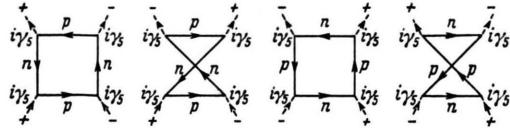
### Berechnung des Integralkerns

Nun führen wir die Berechnung des in der B.S.Gl. auftretenden Integralkerns durch und zwar in 1. Näherung, d. h. wir nehmen an, daß die gesamte Wechselwirkung darin besteht, daß jeweils ein Meson der beiden in Wechselwirkung miteinander stehenden Mesonen ein Paar erzeugt, und daß sich die beiden von den Mesonen erzeugten Paare wieder gegenseitig vernichten und zwei Mesonen erzeugen; genau so wie bei der Streuung von Licht an Licht. Diese einfachste Form der Wechselwirkung kann man für neutrale Mesonen durch die folgenden drei Graphen beschreiben:

Die Summe der drei Graphen ist in den Ausgangs- und Endzuständen völlig symmetrisch, wie



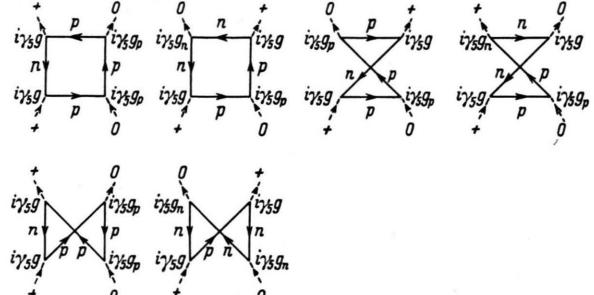
es wegen der Bosonen-eigenschaften der Mesonen auch der Fall sein muß. Für zwei entgegengesetzte geladene Mesonen erhält man die folgenden Graphen.



Da die Abschätzung der Coulombschen Wechselwirkung nur etwa 5% der hier diskutierten ergab, wurde sie in der weiteren Rechnung vernachlässigt.

Der erste Graph geht durch Vertauschung der beiden Endteilchen aus dem zweiten hervor. Der zweite Graph liefert denselben Beitrag wie der erste, wenn man bei symmetrischer Relativzeit für geraden Bahndrehimpuls einen symmetrischen Isotopenspinzustand und für ungeraden Drehimpuls einen antimetrischen Isotopenspinzustand wählt. Nehmen wir eine in den Relativzeiten antimetrische Funktion, so gilt genau das umgekehrte. Die beiden letzten zu den beiden ersten ladungskonjugierten und -vertauschten Graphen liefern genau denselben Beitrag wie die ersten beiden. Für die Kopplung eines neutralen und eines geladenen Mesonenfeldes erhält man sechs verschiedene Graphen, da hier die Ladungskonjugation zusammen mit der Proton-Neutronvertauschung noch jeweils einen anderen Graphen liefert.

Da wir hier  $g_n = -g_p$  (symm. Theorie) vorausgesetzt haben, so erhält man von den beiden ersten



Graphen nur dann einen Beitrag, wenn es sich um einen antimetrischen Isotopenstriplettzustand handelt. In diesem Fall kompensieren sich gerade die beiden dritten Graphen. Die letzteren liefern nämlich nur dann einen Beitrag, wenn es sich um einen symmetrischen Isotopenzustand handelt, also geraden Drehimpuls bei symmetrischer Relativzeit. In diesem Fall liefern die beiden ersten keinen Beitrag zum Matrixelement.

Wir bezeichnen die Fortpflanzungsfunktionen, die durch die drei Graphen beschrieben werden mit

$$G_i(1, 2; 3, 4) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Als Gesamtfortpflanzungsfunktion erhalten wir für neutrale Mesonen

$$G^{00}(1, 3; 3, 4) = G_1(1, 2; 3, 4) + G_2(1, 2; 3, 4) + G_3(1, 2; 3, 4), \quad (23)$$

für entgegengesetzte geladene Mesonen im antimetrischen Isotopenspinzustand

$$G^{+-}(1, 2; 3, 4) = G_1(1, 2; 3, 4) + G_2(1, 2; 3, 4), \quad (23a)$$

für ein neutrales und ein geladenes Meson in antimetrischen Isotopenspinzustand

$$G^{0+}(1, 2; 3, 4) = G_1(1, 2; 3, 4) + G_2(1, 2; 3, 4) \quad (23b)$$

und im symmetrischen Isotopenspinzustand

$$G^{0+}(1, 2; 3, 4) = G_3(1, 2; 3, 4). \quad (23c)$$

Nach Feynman<sup>15</sup> ergeben sich die einzelnen Fortpflanzungsfunktionen zu

$$G_1(1, 2; 3, 4) = -i \frac{g^4}{12(2\pi)^{16}} \text{Sp} \int \int \int \int d^4 \tilde{p}_1 d^4 \tilde{p}_2 d^4 \tilde{p}_3 d^4 \tilde{p}_4 \frac{1}{\tilde{p}_1 - m} i \gamma_5 \frac{1}{\tilde{p}_2 - m} i \gamma_5 \frac{1}{\tilde{p}_3 - m} i \gamma_5 \frac{1}{\tilde{p}_4 - m} i \gamma_5 \cdot \delta(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 + p_2) \delta(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3 - p_3) \delta(\tilde{p}_3 - \tilde{p}_4 - p_4) \delta(\tilde{p}_4 - \tilde{p}_1 + p_1) \quad (24)$$

und entsprechend  $G_2$  und  $G_3$ . Bei dem Faktor  $1/12 = 1/4! \cdot 2$  röhrt der Faktor 2 davon her, daß das ladungs-konjugierte und -vertauschte Matrixelement zu dem ursprünglichen addiert wird.

Wegen der Impulserhaltung an jeder Ecke bleibt nur noch eine Integrationsvariable, über die zu integrieren ist, übrig. Eine  $\delta$ -Funktion tritt als Ausdruck der Erhaltung des Gesamtimpulses vor das ganze Integral, wir schreiben sie aber nicht mehr ausdrücklich hin.

Es folgt nach Ausführung der Spurbildung mit den Abkürzungen

$$K_i = \tilde{p}_i^2 - m^2$$

in den verschiedenen Integralen

$$\begin{aligned} G_1(1, 2; 3, 4) &= G_1(P; p, p') = -i \frac{g^4}{12 (2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{K_1 K_2 K_3 K_4} \left\{ (K_1 + K_2 - p_2^2) (K_3 + K_4 - p_3^2) \right. \\ &\quad \left. + (K_1 + K_4 - p_1^2) (K_2 + K_3 - p_4^2 - (K_1 + K_3 - (p - p')^2) (K_2 + K_4 - P^2)) \right\}, \\ G_2(P; p, p') &= G_1(P; p, -p'), \\ G_3(1, 2; 3, 4) &= -i \frac{g^4}{12 (2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{K_1 K_2 K_3 K_4} \left\{ (K_1 + K_2 - p_3^2) (K_3 + K_4 - p_4^2) + (K_1 + K_4 - p_1^2) (K_2 + K_3 - p_2^2) \right. \\ &\quad \left. - (K_1 + K_3 - (p - p')^2) (K_2 + K_4 - (p + p')^2) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Man sieht, daß die Formeln einfach gebaut sind. Man hat die Summe zweier  $K_i$  zu nehmen und den dazwischen liegenden ankommenden bzw. weggehenden Impuls. Dies ergibt die ersten beiden Glieder. Für das letzte hat man die gegenüberliegende  $K_i$  zu nehmen und das Quadrat der in beiden Ecken ankommenden Impulse.

Zur wesentlichen Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, daß der Betrag des Gesamtimpulses klein im Verhältnis zur Protonenmasse ist. Für die Berechnung eines gebundenen Zustands ist diese Annahme berechtigt, da dann  $P \approx 2\mu$  ist. Für die Nenner läuft dies darauf hinaus, daß man im Schwerpunktssystem das Quadrat der Mesonenenergie gegen das Quadrat der Protonenmasse vernachläßigt. Die Vereinfachung der Rechnung liegt darin, daß man in  $G_1$  und  $G_2$   $1/(K_2 K_4)$  durch

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{[(k - p)^2 - m^2]^2}$$

ersetzt und in  $G_3$  entsprechende Vereinfachungen vorgenommen kann. Für den Zähler sind die Vernachlässigungen deshalb nicht unberechtigt, weil die mit  $P$  und höheren Potenzen von  $P$  behafteten Glieder mehr

Potenzen von  $p$  und  $p'$  im Nenner enthalten, denen geringere Singularitäten entsprechen und die daher nicht wesentlich zur Wechselwirkung beitragen, sie sind ja ohnehin — mindestens im Vergleich zu den anderen Gliedern — mit einem Faktor  $P/2m \approx 1/6$  multipliziert.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} G_1(p, p') &= -i \frac{g^4}{6 (2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{K_1 K_2 K_3} \\ &\cdot \{(K_1 + K - p^2) (K + K_3 - p'^2) - K (K_1 + K_3 - (p - p'))\}, \\ G_3(p, p') &= -i \frac{g^4}{6 (2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{K_1 K_2 K_3 K_4} \\ &\cdot \{K_2 K_4 + K_1 K_3 - p^2 p'^2 - (p p')^2\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Zunächst sieht man, daß die Glieder, die nur zwei  $K$  im Zähler enthalten, divergieren. Ein Resultat, das schon von Thirring<sup>16</sup> und anderen abgeleitet worden ist. Diese divergenten Glieder machen einen Renormierungsterm notwendig, der genau dem Schiffsschen Ansatz einer Nichtlinearität in der Mesonenwellengleichung entspricht.

Man erhält durch Ausführung der Integration, wenn allgemein  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$  bedeutet. (Vgl. Feynman<sup>15</sup>.)

$$\begin{aligned} G_1(p, p') &= \frac{g^4}{3 (4\pi)^2} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \frac{m^2 + \lambda^2}{m^2} + 1 - \frac{1}{4} \int_0^1 d\eta \frac{(p - p')^2 - 4m^2}{\eta \bar{\eta} (p - p')^2 - m^2} - \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 d\eta \int_0^1 d\xi \xi \frac{2pp'}{\xi \eta \bar{\eta} (p - p')^2 + \xi \bar{\xi} (\eta p + \bar{\eta} p')^2 - m^2} + \frac{1}{2} \int_0^1 d\eta \frac{p^2}{\eta \bar{\eta} p^2 - m^2} + \frac{1}{2} \int_0^1 d\eta \frac{p'^2}{\eta \bar{\eta} p'^2 - m^2} - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 d\eta \int_0^1 d\xi \xi^2 \frac{p^2 p'^2}{[\xi \eta \bar{\eta} (p - p')^2 + \xi \bar{\xi} (\eta p + \bar{\eta} p')^2 - m^2]^2} \right\}; \end{aligned} \quad (27)$$

<sup>15</sup> R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 [1949].

<sup>16</sup> W. E. Thirring, Z. Naturforschg. **7a**, 63 [1952].

$G_2(1,2; 3,4)$  entsteht daraus durch Vertauschung von  $p'$  mit  $-p'$ . Schließlich wird

$$G_3(p, p') = \frac{g^4}{3(4\pi)^2} \left\{ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{m^2 + \lambda^2}{m^2} + 2 - \frac{1}{4} \int_0^1 d\eta \frac{(p-p')^2 - 4m^2}{\eta \bar{\eta} (p-p')^2 - m^2} - \frac{1}{4} \int_0^1 d\eta \frac{(p+p')^2 - 4m^2}{\eta \bar{\eta} (p+p')^2 - m^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \int_0^1 d\eta \eta \bar{\eta} \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dy \frac{p^2 p'^2}{\left[ \frac{\eta}{4} \bar{\eta} y^2 (p-p')^2 + \frac{\bar{\eta}}{4} \bar{\eta} x^2 (p+p')^2 - m^2 \right]^2} \right\}. \quad (27a)$$

Setzen wir in den gerade berechneten Graphen  $G_i(1,2; 3,4) p=p'=0$ , so erhalten wir das Resultat von Thirring<sup>16</sup>. Für diesen Fall entspricht das Potential einer abstoßenden  $\delta$ -Kraft, deren unendlich großer Faktor noch durch geeignete Renormierung zu beseitigen ist. Wie Thirring messen wir dieser  $\delta$ -Kraft eine reelle Bedeutung bei und nehmen demgemäß an, daß sie die Absättigung der Kernkräfte verursacht.

Das nächste Glied,

$$V(x) = \int_0^1 d\mu \frac{(p-p')^2 - 4m^2}{\eta \bar{\eta} (p-p'^2) - m^2},$$

dem die höchste Singularität entspricht, ist anziehend. Um zu erkennen, von welcher Art die Singularität ist, transformieren wir das Integral in den Ortsraum und betrachten den nicht-relativistischen Grenzfall. Es ergibt sich\*

$$V(r) = -\frac{1}{12} \left( \frac{g^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r} \left\{ K_2(2mr) + \frac{1}{2} (K_0(2mr)) \right\}.$$

Da  $K_2(2mr)$ , die Hankel-Funktion von rein imaginärem Argument, eine quadratische Singularität im Nullpunkt hat, ist das Potential wie  $1/r^3$  singulär. Wegen dieser starken Singularität läßt sich aber die nichtrelativistische Schrödinger-Gleichung nicht zur Lösung des Eigenwertproblems verwenden, insbesondere auch deswegen nicht, da sich die nächsten Glieder in diesem Grenzfall nicht so einfach deuten lassen. Die vorhin betrachtete Singularität reduziert sich bei relativistischer Betrachtung auf eine logarithmische, wird aber durch die anderen abstoßenden Glieder wieder kompensiert.

Da ferner die abstoßende  $\delta$ -Kraft einen Zustand vom Bahndrehimpuls null verbietet, so ist es in der Tat möglich, einen Zustand der gewünschten Art zu erhalten.

\* Vgl. Watson, Theory of Besselfunctions.

### Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung durch Variationsverfahren

Wir versuchen die B.S.Gl. für den Bahndrehimpuls  $l=1$  im Fall einer antimetrischen Funktion durch einen Ritzschen Ansatz der Form

$$\psi'(p) = \frac{-i p_r \cos \theta}{(p^2 - \beta^2 m^2)^4} \varepsilon(p_4) N_1 \quad (28)$$

und im symmetrischen Fall durch

$$\psi_1(p) = \frac{-i p_r \cos \theta}{(p^2 - \beta^2 m^2)^4} N_1 \quad (28a)$$

zu lösen. Der Parameter  $\beta$ , der im wesentlichen der Abstand der beiden Teilchen ist, ist dabei so zu variieren, daß die Variation in bezug auf  $g$  ein Minimum ergibt, da wir  $g$  als Eigenwert bei gegebener Bindungsenergie  $E=0$  bestimmen wollen. Die in den Wellenfunktionen auftretenden Kugelfunktionen behandeln wir gemäß vorhergegangenen Überlegungen, so daß wir für unser Variationsproblem nur die Funktion

$$\varphi_1(p) = \frac{-i p_r}{(p^2 - \beta^2 m^2)^4} N_1 \quad (29)$$

in Gl. (20) einzusetzen haben. Wir lassen im folgenden den Faktor  $\varepsilon(p_4)$  weg, da er bewirkt, daß sich die Integrale, die sich ohne diesen Faktor kompensieren würden, nun addieren.

Weiterhin wollen wir Interesse halber noch den Drehimpuls zwei betrachten, der symmetrisch in den Relativzeiten ist und einen symmetrischen Isotopenspinzustand bilden muß. Wir machen einen dem obigen entsprechenden Ansatz

$$\psi_2(p) = \frac{-i p_r^2 y_2^0}{(p^2 - m^2 \beta^2)^5} N_2, \quad (30)$$

$$\varphi_2(p) = \frac{-i p_r^2}{(p^2 - m^2 \beta^2)^5} N_2. \quad (31)$$

Diese Funktionen haben am Nullpunkt das richtige Verhalten von Funktionen für den betreffenden Drehimpuls.

Die Normierungsfaktoren ergeben sich zu

$$N_1^2 = \frac{\pi^2}{760} \cdot \frac{1}{(\beta^2 m^2)^5}, \quad N_2^2 = \frac{25 \pi^2}{1024 \cdot 63} \cdot \frac{1}{(\beta^2 m^2)^6}.$$

Die Variationsrechnung wird in der folgenden Weise durchgeführt: Man integriert über die beiden auftre-

tenden Impulse  $p$  und  $p'$ , indem man die auftretenden Überschiebungsinintegrale als Integrale stehen läßt. Die dadurch am Schluß auftretenden drei- bis vierfachen Integrale, die sich alle über den Bereich von 0 bis 1 in den Integrationsvariablen erstrecken, werden dann numerisch als Funktion des Parameters  $\beta$  integriert. Wir bezeichnen mit

$$R_1(\beta) = -i \int F(p^2) \frac{p_r^4 dp_r dp_{r'}^4}{(p^2 - m^2 \beta^2)^8} = \frac{\pi}{560} \frac{1}{(\beta^2 m^2)^3}, \quad R_2(\beta) = -i \int F(p^2) \frac{p_r^6 dp_r dp_{r'}^4}{(p^2 - m^2 \beta^2)^{10}} = \frac{5\pi}{128 \cdot 63} \frac{1}{(\beta^2 m^2)^4}$$

die linken Seiten der Variationsgleichung, und weiterhin sei

$$\begin{aligned} a_l(\beta) &= -\frac{1}{\pi^2} \int dp_4 p_r^2 dp_r \int dp'_4 p_{r'}^2 dp_{r'} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{2}{2l+1}} Y_l(x) dx \int_0^1 d\eta \frac{(p-p')^2}{\eta \bar{\eta} (p-p')^2 - m^2} \varphi_l(p) \varphi_l(p'), \\ b_l(\beta) &= -\frac{4m^2}{\pi^2} \int dp_4 p_r^2 dp_r \int dp'_4 p_{r'}^2 dp_{r'} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{2}{2l+1}} Y_l(x) dx \int_0^1 d\eta \frac{1}{\eta \bar{\eta} (p-p')^2 - m^2} \varphi_l(p) \varphi_l(p'), \\ c_l(\beta) &= \frac{1}{\pi^2} \int dp_4 p_r^2 dp_r \int dp'_4 p_{r'}^2 dp_{r'} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{2}{2l+1}} Y_l(x) dx \int_0^1 d\eta \int_0^1 \xi d\xi \frac{2pp'}{\eta \bar{\eta} (p-p')^2 + \xi \bar{\xi} (\eta p + \bar{\eta} p')^2 - m^2} \\ &\quad \cdot \varphi_l(p) \varphi_l(p'). \end{aligned}$$

Die weiteren in den Gln. (27), (27a) auftretenden Integrale rechnen wir nicht aus, da sie erst für große  $p, p'$ , d. h. kleine Abstände groß werden. Die Wechselwirkung, die durch diese Integrale vermittelt wird, hat also eine noch kleinere Reichweite als  $1/2 m$ . Eine genauere mathematische Analyse lieferte, daß diese Integrale bei  $\beta \approx 1$  höchstens  $1/30$  der anderen Integrale betragen. Damit ergibt sich

$$\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)_{\text{sym}}^2 = \min_{\beta} \frac{\pi R_l}{a_l - b_l + 2c_l}, \quad \left(\frac{g^2}{4\pi}\right)_{\text{antisym}}^2 = \min_{\beta} \frac{\pi R_l}{a_l - b_l + c_l}.$$

Wir erhalten nach Ausführung der Integration über  $p$  und  $p'$  mit

$$\alpha_1 = \xi \bar{\eta} (\bar{\xi} \bar{\eta} + \eta), \quad \alpha_2 = \eta \bar{\eta} \xi^2, \quad \alpha_3 = \xi \bar{\eta} (\xi \eta + \bar{\eta})$$

und

$$\begin{aligned} z_1 &= zy\bar{y} \eta \bar{\eta} \beta^2 + \bar{z} (y \eta \bar{\eta} \beta^2 + \bar{y}), \quad z_2 = z\bar{y} \beta^2 \left( \alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \bar{y} \right) + \bar{z} (y \alpha_1 \beta^2 + \bar{y}), \\ a_1 &= \frac{1}{32m^6} \int_0^1 d\eta \int_0^1 dy \int_0^1 dz \left\{ \frac{1}{3} \frac{(\eta \bar{\eta})^2 \bar{y} y^4 \bar{z} z^3}{z_1^3} - \frac{(\eta \bar{\eta})^2 \bar{y}^2 y^4 \bar{z}^2 z^3}{z_1^4} \right\}, \\ b_1 &= -\frac{1}{8m^6} \int_0^1 d\eta \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{(\eta \bar{\eta})^2 \bar{y}^2 y^4 \bar{z}^2 z^3}{z_1^4}, \\ c_1 &= -\frac{1}{32m^6} \int_0^1 d\eta \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 \xi d\xi \left\{ \frac{1}{3} \frac{\bar{y} y^3 \bar{z} z^3 (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2 \bar{y})}{z_2^3} + 2 \frac{\bar{y}^2 y^3 \bar{z}^2 z^3 \alpha_2^2}{z_2^4} \right\}, \\ a_2 &= \frac{5}{144m^8} \int_0^1 d\eta \int_0^1 dy \int_0^1 dz \left\{ \frac{1}{4} \frac{(\eta \bar{\eta})^3 \bar{y}^2 y^5 \bar{z}^2 z^4}{z_1^4} - \frac{(\eta \bar{\eta})^3 \bar{y}^3 y^5 \bar{z}^3 z^5}{z_1^5} \right\}, \\ b_2 &= -\frac{5}{36m^8} \int_0^1 d\eta \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{(\eta \bar{\eta})^3 \bar{y}^3 y^5 \bar{z}^3 z^5}{z_1^5}, \\ c_2 &= -\frac{5}{72m^8} \int_0^1 d\eta \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 \xi d\xi \left\{ \frac{\bar{y}^2 y^4 \left( \alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \bar{y} \right) \alpha_2^2 \bar{z}^2 z^4 \xi}{z_2^4} + 4 \frac{\bar{y}^3 y^5 \alpha_2^3 \bar{z}^3 z^5}{z_2^5} \right\}. \end{aligned}$$

### Berechnung des Eigenwertes

Bevor wir die Ergebnisse der numerischen Integration besprechen, wollen wir qualitativ das Verhalten der Integrale  $a_i(\beta)$ ,  $b_i(\beta)$  und  $c_i(\beta)$  als Funktionen des Parameters betrachten. Zunächst sieht man, daß für  $\beta \rightarrow 0$  die Werte  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  wie  $\beta^{2l+4}$  gegen Null gehen. Daraus folgt, daß der Quotient auch ohne die Vernachlässigung der Potenzen von  $\mu/m$  in der Funktion  $R_i(\beta)$  noch mindestens wie  $\beta^2$  gegen Null geht.

Das Verhalten der Integrale für  $\beta^2 \rightarrow \infty$  — d. h. für kleine Abstände der beiden Teilchen — ist etwas schwieriger zu untersuchen. Wir betrachten zunächst das Integral  $a_1$ . Es wird

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow \infty} a_1 \beta^6 = \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta \bar{\eta}} \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\bar{y}\bar{y}\bar{z}^3}{[\bar{y}z + \bar{z}]^3}.$$

Das dabei auftretende Doppelintegral über  $y$  und  $z$  hat einen endlichen Wert. Wir sehen somit, daß das Integral für diesen Grenzfall logarithmisch divergiert. Dasselbe gilt für  $a_2$ . Weiterhin ergibt sich für das Integral  $b_1$

$$\lim_{\beta^2 \rightarrow \infty} b_1 \beta^6 = \frac{1}{\beta^2} \int_0^1 \frac{d\bar{\eta}}{(\eta \bar{\eta})^2} \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\bar{y}^2 \bar{y} \bar{z}^2 \bar{z}^3}{[\bar{y}z + \bar{z}]^4}.$$

Dieses Integral hat ein Maximum und das Variationsproblem ließe sich auch ohne die anderen Glieder lösen.

Analog ergibt sich, daß das Integral  $b_2$  für  $\beta^2 \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Für  $c_1$  ergibt sich dagegen, daß es linear gegen Unendlich geht, während  $c_2$  logarithmisch divergiert.

Im ersten Fall hat das Variationsverfahren immer eine Lösung, während dies im zweiten Fall nur durch genaue Rechnung entschieden werden kann.

Um nun die Größe von  $g^2/(4\pi)$  aus dem Variationsproblem bestimmen zu können, wurde die Berechnung der Integrale  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  in Abhängigkeit von  $\beta$  numerisch durchgeführt. Die als Funktionen des Parameters auftretenden Integrale wurden unter Verwendung der Gaußschen Quadraturformel mit der 5. Kugelfunktion numerisch mit der Göttinger Elektronenrechenmaschine ausgerechnet. Eine grobe Abschätzung ergab, daß der relative Fehler etwa 5% nicht übersteigt.

Führt man die Integrationen aus, so erhält man Tab. 1.

$\beta$	$(a_1 - \frac{1}{4}b_1) \cdot 3C_1$	$-(\frac{1}{4})b_1 \cdot C_1$	$c_1 \cdot 3C_1$	$(a_2 - \frac{1}{4}b_2) \cdot 4C_2$	$-(\frac{1}{4})b_2 \cdot C_2$	$c_2 \cdot 2C_2$
2,75				2,80	0,507	0,760
2,50	0,413	0,0392	0,169	2,67	0,495	0,706
2,25	0,388	0,0407	0,160	2,48	0,475	0,656
2,00	0,359	0,0421	0,147	2,29	0,444	0,567
1,75	0,325	0,0431	0,134	2,09	0,404	0,487
1,50	0,285	0,0435	0,120	1,71	0,356	0,398
1,25	0,237	0,0427	0,100	1,29	0,298	0,303
1,00	0,182	0,0345	0,079	0,88	0,254	0,207

$$\text{Tab. 1. } [C_1 = \frac{8}{9} \cdot 32, C_2 = \frac{8 \cdot 256}{9} \cdot \frac{144}{5}].$$

Mit diesen Werten erhalten wir bei antimetrischer Zeit und neutralen Mesonen für  $l=1$

$$g^2/(4\pi) = 7,9 \quad \text{Min. für } \beta = 2,00,$$

bei symmetrischer Zeit und Antimetrie in den Ladungen

$$g^2/(4\pi) = 13,8 \quad \text{Min. für } \beta = 1,50.$$

Für den Drehimpuls  $l=2$  erhalten wir für neutrale Mesonen und symmetrische Zeit

$$g^2/(4\pi) = 22,2, \quad \text{Min. für } \beta = 2,75$$

und bei antimetrischen Ladungszuständen und antimetrischer Zeit

$$g^2/(4\pi) = 36,00 \quad \text{Min. für } \beta = 2,75.$$

Die Durchführung für einen symmetrischen Ladungszustand ergibt kein Minimum. Das Verhältnis der Abstände der beiden Teilchen an der Stelle des Maximums für  $l=1$  und  $l=2$  erscheint vernünftig, da die Wechselwirkungspotentiale ziemlich schnell abfallen, jedenfalls schneller als  $1/r^2$  im nichtrelativistischen Grenzfall, so daß sich die Teilchen bei höheren Drehimpulzzuständen enger aneinander lagern müssen, damit die Zentrifugalkraft kompensiert werden kann und der Zustand stabil ist.

### Schlußbemerkungen

Wir können das Ergebnis der Arbeit folgendermaßen zusammenfassen:

#### 1. Die Auswahlregeln erlauben

a) einen in den Relativzeiten symmetrischen Zustand vom Bahndrehimpuls  $l=1$  aus verschiedenen geladenen  $\pi$ -Mesonen, wenn die Wellenfunktion der beiden Teilchen antimetrisch im Isotopenspinraum angenommen wird.

b) einen aus gleichen  $\pi$ -Mesonen zusammengesetzten Zustand vom Bahndrehimpuls  $l=1$ , der antimetrisch in der Zeit ist und sich bei Raum-Zeit-Spiegelung wie ein Pseudovektor transformiert. Die diesem Zustand zugehörige Wellenfunktion ver-

schwindet im nichtrelativistischen Grenzfall. Es ist uns nicht gelungen, irgendwelche Auswahlregeln zu finden, nach denen ein solcher Zustand verboten sein sollte. Aus der speziellen Aussage, daß der Zerfall eines Pseudovektormesons in zwei pseudoskalare Mesonen über das Nukleon-Antinukleonfeld zum mindesten in erster Näherung verboten ist, kann man einen solchen Schluß nicht mit Gewißheit ziehen. Die Transformation der Zwei-Mesonenwellenfunktion zeigt, daß es sich bei diesem Zustand, der antimetrisch in den Relativzeiten ist, um einen relativistischen Effekt handelt.

2. Unter der Annahme, daß zwei pseudoskalare  $\pi$ -Mesonen miteinander über das Nukleon-Antinukleonfeld in Wechselwirkung stehen, zeigt diese Wechselwirkung das folgende Bild: Es gibt eine abstoßende  $\delta$ -Kraft, deren Faktor zwar logarithmisch divergent ist, aber entweder durch Abschneiden endlich gemacht, oder aber durch Renormierung beseitigt werden kann. Wir messen dieser  $\delta$ -Kraft reale Bedeutung bei und nehmen an, daß sie zur Erklärung der Absättigung der Kernkräfte dienen kann. Ferner tritt eine anziehende Kraft von der halben Compton-Wellenlänge des Nukleons auf. Während die  $\delta$ -Kraft einen gebundenen Zustand vom Bahndrehimpuls  $l=0$  ausschließt, ist ein gebundener Zustand mit  $l=1$  möglich.

3. Die vorhergegangenen Rechnungen, die nur in erster störungstheoretischer Näherung durchgeführt worden sind und bei denen außerdem die Mesonenmasse und damit konsequenterweise auch die Bindungsenergie des Doppelmesons gegenüber der Protonenmasse vernachlässigt worden sind, liefern aus der Forderung der Möglichkeit der Existenz eines gebundenen Zustands vom Bahndrehimpuls  $l=1$  eine Bedingung für die Kopplungskonstante zwischen Nukleonen und Mesonen. Nimmt man an, das Doppelmeson sei aus zwei entgegengesetzt geladenen  $\pi$ -Mesonen zusammengesetzt, so muß die Kopplungskonstante etwa den Wert 14 haben. Setzt man es hingegen aus zwei neutralen  $\pi$ -Mesonen zusammen, die eine in der Relativzeit antimetrische Wellenfunktion haben, so ergibt sich die Größenordnung 8. Eine geringfügige Änderung der Kopplungskonstanten führt zu einer großen Änderung der Bindungsenergie des Doppelmesons.

Herrn Professor C. F. v. Weizsäcker bin ich für sein förderndes Interesse und rege Anteilnahme an dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet. Herrn Professor W. Heisenberg danke ich für zahlreiche anregende Diskussionen. Herrn Professor L. Biermann möchte ich für die Erlaubnis zur Benutzung der Göttinger Elektronenrechenmaschine, ohne die die numerischen Rechnungen kaum durchführbar gewesen wären, meinen Dank aussprechen.

## Dünne Halbleiterschichten auf Glas

Von ALBRECHT FISCHER

Aus dem Physikalischen Institut der Justus-Liebig-Hochschule Gießen  
(Z. Naturforsch. 9a, 508–511 [1954]; eingegangen am 26. März 1954)

Durch Zersetzung bestimmter Metallverbindungen an heißen Glasoberflächen können dünne oxydische Halbleiterschichten hergestellt werden. Besonders hohe Leitfähigkeit bei guter Durchsichtigkeit zeigen Schichten aus Zinn- und Indiumoxyd. Die Leitfähigkeit kann durch Zusätze beeinflußt werden. Die charakteristischen Daten der Halbleiterschichten werden angegeben, die gute Durchsichtigkeit wird mit der Drude-Zenerschen Theorie der metallischen Absorption erklärt.

Die Ionenleitfähigkeit von Glas, die namentlich bei höheren Temperaturen auftritt, ist seit langem bekannt. Hier soll nur von derjenigen Leitfähigkeit die Rede sein, welche von Überschuß- oder Defektelektronen erzeugt wird. Glas kann durch und durch oder auch nur oberflächlich leitend gemacht werden. Im ersten Falle werden geeigneten Grundgläsern hohe Prozentsätze von halbleitenden Oxyden ( $Fe_2O_3$ ,  $CoO$ ,  $Bi_2O_3$ ,  $PbCrO_4$ ) einverlebt. Für viele Zwecke genügt es jedoch, wenn nur die

Oberfläche des Glases leitend ist. Dies kann man erreichen, indem man Gläser mit starkem Gehalt an Blei- oder Wismutoxyd einer mehrstündigen Reduktion im Wasserstoffstrom bei erhöhter Temperatur aussetzt.

Gute Leitfähigkeit der Glasoberfläche kann aber auch dadurch erzielt werden, daß man eine Halbleiterschicht, welche aus Material besteht, welches dem Grundglase nicht angehört, in die Glasoberfläche einbrennt. Hierzu ist in den letzten Jahren